Integración de funciones reales continuas de una variable

Área del conjunto limitado por una gráfica

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ notaremos por $G(f,a,b)$ el conjunto limitado por la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x=a$, $x=b$.

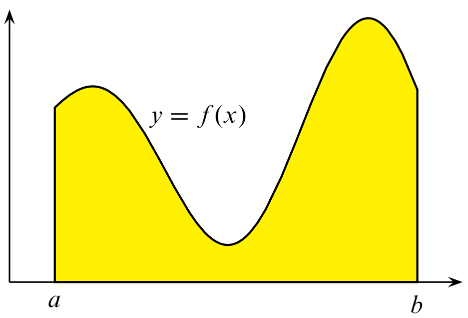

Figura 1. Conjunto ordenado $G(f,a,b)$ de una función

Partición de un intervalo.

Queremos dar una definición matemática del área de dicho conjunto. Aproximaremos el área por rectángulos. Para ello, dividimos el intervalo $[a,b]$ en un número finito de subintervalos $[x_{k-1},x_k]$, $1\leqslant k\leqslant n$, cuyas longitudes pueden ser distintas y con la única condición de que no se solapen:

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

Se dice que estos puntos constituyen una **partición** de $[a,b]$.

Sumas superior e inferior y sumas de Riemann.

Dada una partición $P=\{a=x_0,x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n=b\}$ del intervalo $[a,b]$, definamos $M_k=\text{máx}\, f[x_{k-1},x_k]$, $m_k=\text{mín}\, f[x_{k-1},x_k]$. Los números

$$S(f,P)=\sum_{k=1}^{n}M_k(x_k-x_{k-1}),\qquad I(f,P)=\sum_{k=1}^{n}m_k(x_k-x_{k-1})$$

se llaman, respectivamente, **suma superior** y **suma inferior** de f para la partición P.

Dados n puntos $t_k\in[x_{k-1},x_k]$, $1\leqslant k\leqslant n$, el número

$$\sigma(f,P)=\sum_{k=1}^{n}f(t_k)(x_k-x_{k-1})$$

se llama *una* **suma de Riemann** de f para la partición P.

Para cada partición del intervalo $[a,b]$ hay una única suma superior y otra inferior pero muchas sumas de Riemann.

Puesto que para todo $t_k\in[x_{k-1},x_k]$ es $m_k\leqslant f(t_k)\leqslant M_k$, deducimos que para toda suma de Riemann, $\sigma(f,P)$, de f para la partición P se verifica que $I(f,P)\leqslant\sigma(f,P)\leqslant S(f,P)$.

Interpretación de las sumas superior e inferior

Cuando f *es positiva*, y las longitudes de todos los subintervalos de la partición son suficientemente pequeñas, el número $I(f,P)$ es un *valor aproximado por defecto* y el número $S(f,P)$ es un *valor aproximado por exceso* del área de la región $G(f,a,b)$.

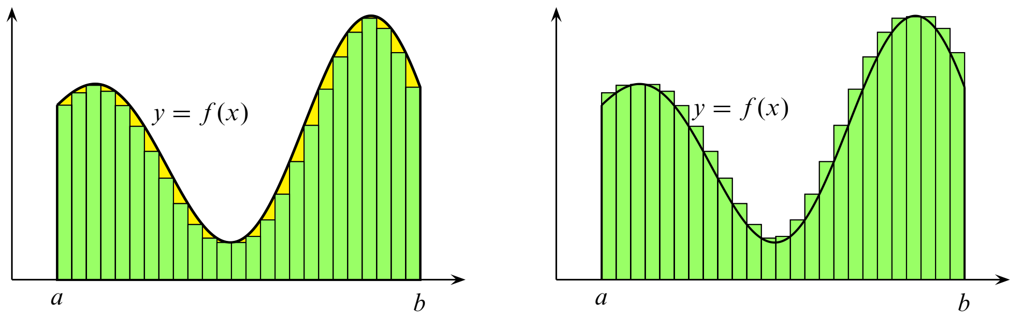

Figura 2. Aproximación del área por sumas inferiores y superiores

La integral como área.

Sea f una función continua y positiva en $[a,b]$. Entonces se verifica que

$$\boxed{\inf\{S(f,P) : P \in \mathcal{P}[a,b]\} = \sup\{I(f,P) : P \in \mathcal{P}[a,b]\}}$$

Dicho valor común es, por definición, el **valor del área** del conjunto $G(f,a,b)$ y lo representaremos por $\lambda(G(f,a,b))$. Por definición, la integral de f en $[a,b]$ es igual a $\lambda(G(f,a,b))$. Simbólicamente escribimos:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda(G(f,a,b))}$$

Partes positiva y negativa de una función.

Cualquier función f puede escribirse como diferencia de dos funciones positivas:

$$f^+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} = \text{máx}\{f(x), 0\}$$

$$f^-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} = \text{máx}\{-f(x), 0\}$$

Tenemos que $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ y que $f^+(x) \geqslant 0$, $f^-(x) \geqslant 0$. La función f^+ se llama **parte positiva** de f, y la función f^- se llama **parte negativa** de f.

Como consecuencia de las definiciones dadas $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$.

Si f es continua también f^+ y f^- son continuas.

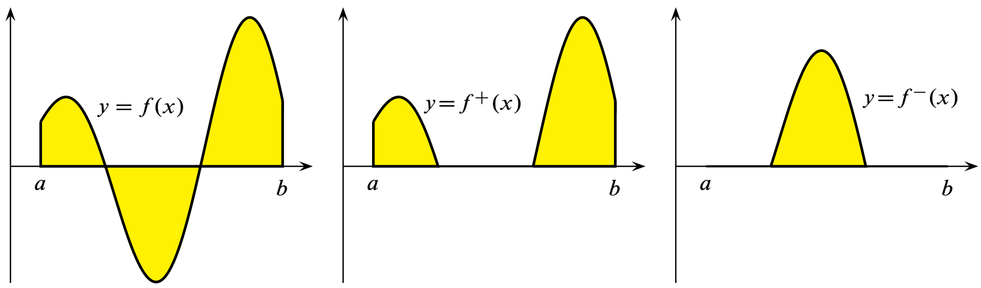

Figura 3. Partes positiva y negativa de una función

La integral como área con signo.

En el caso general en que la función continua f tome valores positivos y negativos se define la integral de f en $[a,b]$ como el número:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f^-(x)\,\mathrm{d}x = \lambda(G(f^+,a,b)) - \lambda(G(f^-,a,b))}$$

Propiedades básicas de la integral.

Linealidad.

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Conservación del orden. Si $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in [a,b]$ entonces

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

En particular

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

La integral como límite de sumas de Riemann.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

En particular:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Estas igualdades sirven, más que para calcular integrales, para calcular límites de ciertas sucesiones que pueden expresarse como sumas de Riemann de una función.

Teorema Fundamental del Cálculo.

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y definamos $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

para todo $x \in [a,b]$. Entonces F es derivable en $[a,b]$ y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

Primitivas.

Dada un función $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, cualquier función $H : [a,b] \to \mathbb{R}$ que sea continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$ y verifique que $H'(x) = h(x)$ para todo $x \in]a,b[$, se llama una **primitiva** de h en el intervalo $[a,b]$.

Dos primitivas de una función en un mismo intervalo se diferencian en una constante.

Convenio.

A veces hay que considerar funciones de la forma

$$H(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

en donde $a < c < b$ y $x \in [a,b]$; por lo que es necesario precisar lo que se entiende por $\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ cuando $x < c$. El convenio que se hace es que:

$$\int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_v^u f(t)\,\mathrm{d}t$$

cualesquiera sean los números u y v.

Como consecuencia del teorema Fundamental del Calculo, tenemos que si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función continua en un intervalo I y $a \in I$, la función $F : I \to \mathbb{R}$ dada por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

es una primitiva de f en I.

Toda función continua en un intervalo tiene primitivas en dicho intervalo.

El siguiente resultado es la herramienta principal para calcular integrales.

Regla de Barrow.

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y supongamos que h es una primitiva de f en $[a,b]$. Entonces:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = h(b) - h(a)$$

Derivación de funciones definidas por integrales.

Para derivar funciones de la forma

$$H(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

donde f es una función continua y g es una función derivable, se aplica el teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena para derivar la función compuesta $H(x) = F(g(x))$, donde

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Tenemos que:

$$H'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

Para derivar funciones de la forma

$$H(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

donde f es una función continua y u, v son funciones derivables, se escribe

$$H(x) = \int_a^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = F(v(x)) - F(u(x))$$

y se aplica lo dicho antes.

Integrales impropias de Riemann

Queremos precisar el significado que debemos dar a la integral de una función continuas no acotada o a la integral en un intervalo no acotado.

Sea $f : [c, b[\to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo $[c, b[$, donde suponemos que $c \in \mathbb{R}$ y que b un número real mayor que c o bien $b = +\infty$. Se define la integral impropia de Riemann de f en $[c, b[$ como el límite:

$$\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to b} \int_c^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

Supuesto, claro está, que dicho límite exista y sea un número real, en cuyo caso se dice también que la integral de f es convergente en $[c, b[$.

Sea $f :]a, c] \to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo $]a, c]$, donde suponemos que $c \in \mathbb{R}$ y que a un número real menor que c o bien $a = -\infty$. Se define la integral impropia de Riemann de f en $]a, c]$ como el límite:

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to a} \int_t^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Supuesto, claro está, que dicho límite exista y sea un número real, en cuyo caso se dice también que la integral de f es convergente en $]a, c]$.

Cuando los límites anteriores existen y son igual a $+\infty$ (resp. $-\infty$) se dice que la respectiva integral es positivamente o negativamente divergente.

Sea $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo $]a,b[$, donde $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Sea $c \in \mathbb{R}$ con $a < c < b$. Se dice que la integral de f es convergente en $]a,b[$ cuando las integrales de f en $]a,c]$ y en $[c,b[$ son convergentes, en cuyo caso se define:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Criterios de convergencia para integrales impropias.

Interesa conocer condiciones que aseguren la convergencia de una integral sin necesidad de calcular una primitiva elemental. Lógicamente, estas condiciones no nos permitirán calcular el valor numérico de la integral; tan sólo nos dirán si es o no convergente. Estos criterios de convergencia son muy fáciles para el caso de funciones positivas.

Criterio básico de convergencia. Sea f continua y positiva en $[c,b[$. Entonces, la integral de f en $[c,b[$ es convergente si, y sólo si, la función

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

está mayorada en $[c,b[$. En otro caso la integral de f en $[c,b[$ es positivamente divergente.

Criterio de comparación. Sean f y g continuas y positivas en $[c,b[$. Supongamos que la integral de g en $[c,b[$ es convergente y que $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in [c,b[$. Entonces la integral de f en $[c,b[$ también es convergente.

Criterio límite de comparación. Sean f y g continuas y positivas en $[c,b[$ donde suponemos que $c \in \mathbb{R}$ y que b un número real mayor que c o bien $b = +\infty$. Supongamos que:

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \rho \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}\,.$$

Entonces:

Si $0 < \rho < +\infty$ las integrales de f y g en $[c,b[$ ambas convergen o ambas divergen positivamente.

Si $\rho = 0$ y la integral de g en $[c,b[$ es convergente también lo es la integral de f.

Si $\rho = +\infty$ y la integral de g en $[c,b[$ es divergente también lo es la integral de f.

Integrales impropias absolutamente convergentes. Se dice que la integral de f es **absolutamente convergente** en un cierto intervalo cuando la integral de la función $|f|$ es convergente en dicho intervalo.

Se verifica que ***si la integral de f es absolutamente convergente, entonces la integral de f también es convergente.***

Algunas técnicas de cálculo de primitivas.

El problema del cálculo de primitivas consiste en tratar de expresar la ***"primitiva trivial"*** de una función continua

$$F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$$

por medio de funciones elementales que permitan una evaluación efectiva de la integral. Esto **no siempre puede hacerse**: es frecuente que una función elemental no tenga primitivas que puedan expresarse por medio de funciones elementales. Esto ocurre, por ejemplo, con las funciones e^{-x^2}, $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, $\operatorname{sen}(x^2)$, $\sqrt{x^3+1}$, y muchas más.

Vamos a ver algunos tipos de funciones elementales cuyas primitivas también pueden expresarse por medio de funciones elementales y pueden calcularse con procedimientos más o menos sistemáticos.

Notación y terminología usuales.

Para representar una primitiva de una función f, se usa la notación

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

La integral de una función en un intervalo, $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, se llama a veces ***"integral definida"*** de f (**y es un número**).

El símbolo $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ se llama ***"integral indefinida"*** o, simplemente, *"integral"* de f (y ***representa una primitiva cualquiera*** de f).

No te confundas. Aunque esto puede ser confuso, no olvides que, ***cuando hablamos de calcular la integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ lo que realmente queremos decir es que queremos calcular una primitiva de f.***

Variable de integración.

Como ya sabes, en los símbolos $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ o $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ la letra "x" puede sustituirse por cualquier otra y el símbolo "$\mathrm{d}x$" (que se lee *"diferencial x"*) sirve para indicar la variable de integración. Esto es muy útil si la función f contiene parámetros. Por ejemplo, son muy diferentes las integrales $\int x^y dx$ y $\int x^y dy$.

Notación diferencial para la derivada.

Te recuerdo también que, si $y=y(x)$ es una función de x, suele usarse la notación $\mathrm{d}y=y'\,\mathrm{d}x$ que es útil para mecanizar algunos cálculos pero que no tiene ningún significado especial: es una forma de indicar que y' es la derivada de y respecto a x.

Finalmente, si φ es una función, se usa la notación $\varphi(x)\big|_{x=c}^{x=d}$ o $\varphi(x)\big|_c^d$ para indicar el número $\varphi(d)-\varphi(c)$, y usaremos la notación $\varphi(x)\big|_{x\to a}^{x\to b}$ para indicar $\lim\limits_{x\to b}\varphi(x)-\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$. Esta notación es cómoda cuando estudiamos convergencia de integrales.

Integración por partes.

$$\boxed{\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x}$$

Lo que suele escribirse en la forma:

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$$

Para el caso de integrales impropias:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_{x\to a}^{x\to b} - \int_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$$

Casos en que se usa la integración por partes.

Para calcular una integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ en la que la derivada de $f(x)$ es más sencilla que la propia función, como es el caso de $\log x$, $\operatorname{arc\,sen} x$, $\operatorname{arc\,tg} x$. Se elige $u(x) = f(x)$.

Cuando $f(x)$ es de la forma $P(x)\,\mathrm{e}^{ax}$, $P(x)\operatorname{sen}(ax)$, $P(x)\cos(ax)$, donde $P(x)$ es una función polinómica. En todos los casos se elige $u(x) = P(x)$ y se obtiene una integral *del mismo tipo que la primera pero con el grado del polinomio rebajado en una unidad*. El proceso se repite tantas veces como sea necesario.

Cuando la integral $\int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$ es parecida a la de partida, de forma que al volver a aplicar el proceso la integral de partida se repite y es posible despejarla de la igualdad obtenida.

Integración por sustitución o cambio de variable.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x = g(t), \ \mathrm{d}x = g'(t)dt \\ a = g(c), \ b = g(d) \end{bmatrix} = \int_c^d f(g(t))g'(t)\,dt}$$

Para el caso de integrales indefinidas este proceso de sustitución se representa de forma menos precisa y se escribe simplemente

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x = g(t) \\ \mathrm{d}x = g'(t)dt \end{bmatrix} = \int f(g(t))g'(t)\,dt$$

Pueden hacerse cambios de variable en integrales impropias. Puede ocurrir que al hacer un cambio de variable en una *"integral corriente"* obtengamos una *"integral impropia"*. No hay que preocuparse porque **para estudiar la convergencia de una integral pueden hacerse cambios de variable *biyectivos*: ello no altera la eventual convergencia de la integral ni su valor**.

Integración de funciones racionales por el método de los coeficientes indeterminados.

Dadas dos funciones polinómicas $P(x)$ y $Q(x)$, queremos calcular $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$. Para ello vamos a descomponer la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en otras más sencillas llamadas *"fracciones simples"*.

Si el grado de P es *mayor o igual* que el de Q, se dividen los dos polinomios obteniendo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{G(x)}{Q(x)}$$

donde $H(x)$ y $G(x)$ son polinomios y el grado de G es *menor* que el grado de Q. Por tanto, *supondremos en lo que sigue que este paso ya se ha realizado y que el grado de P es menor que el grado de Q. Supondremos también que el coeficiente líder del polinomio Q es* 1.

Lo siguiente es descomponer el denominador $Q(x)$ en producto de factores irreducibles. Cada raíz real α de multiplicidad k da lugar a un factor del tipo $(x-\alpha)^k$. Cada raíz compleja junto con su conjugada de multiplicidad p dan lugar a un factor del tipo $(x^2+bx+c)^p$ con $(b^2-4c<0)$. Solamente consideraremos el caso de raíces complejas simples.

El paso siguiente es igualar $\frac{P(x)}{Q(x)}$ a una suma de fracciones simples.

Por cada factor del tipo $(x-\alpha)^k$ debemos poner una suma de k fracciones de la forma:

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{A_j}{(x-\alpha)^j}$$

Por cada factor del tipo x^2+bx+c con $(b^2-4c<0)$ debemos poner una fracción del tipo:

$$\frac{Mx+N}{x^2+bx+c}$$

Los coeficientes A_j, M, N se calculan **reduciendo a común denominador e identificando numeradores**.

Sólo nos queda calcular las integrales correspondientes a dichas fracciones simples.

$$\int \frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}x = A\ln|x-a|, \qquad \int \frac{A}{(x-a)^k}\,\mathrm{d}x = -\frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}} \quad (k\in\mathbb{N},\ k\geqslant 2)$$

Cálculo de $\int \frac{M\,x+N}{x^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$. Escribimos $x^2+bx+c=(x-\alpha)^2+\beta^2$ con $\alpha=-b/2$ y $\beta=\sqrt{c-b^2/4}$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{M(x-\alpha)+N+M\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int \frac{M(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{N+M\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{M}{2}\ln\Big((x-\alpha)^2+\beta^2\Big) + (N+M\alpha)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \\
&= \frac{M}{2}\ln\Big((x-\alpha)^2+\beta^2\Big) + \frac{N+M\alpha}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right).
\end{aligned}$$

Integración por racionalización.

Acabamos de ver que la primitiva de una función racional siempre puede expresarse mediante funciones elementales.

Nos vamos a ocupar ahora de algunos tipos de funciones no racionales cuyas integrales se pueden transformar, por medio de un cambio de variable, en integrales de funciones racionales. Se dice entonces que la integral de partida se ha *racionalizado* y esta técnica se conoce como *"integración por racionalización"*.

Integración de funciones del tipo $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$**.**

Las integrales del tipo $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ donde $R = R(x, y)$ una función racional de dos variables, se racionalizan con el cambio de variable $t = \operatorname{tg}(x/2)$. Con lo que

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

Con ello resulta:

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,\mathrm{d}x = \Big[t = \operatorname{tg}(x/2)\Big] = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

Casos particulares.

• Cuando $R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ se dice que *"R es par en seno y coseno"*. En este caso es preferible el cambio $\operatorname{tg} x = t$. Con lo que

$$\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{dt}{1+t^2}$$

En el caso particular de tratarse de una integral del tipo

$$\int \operatorname{sen}^n x \, \cos^m x \, \mathrm{d}x$$

con n y m números enteros *pares*, es preferible simplificar la integral usando las identidades

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

• Cuando $R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ se dice que *"R es impar en seno"* y el cambio $\cos x = t$ suele ser eficaz.

• Cuando $R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ se dice que *"R es impar en coseno"* y el cambio $\operatorname{sen} x = t$ suele ser eficaz.

Aplicaciones de la integral.

Cálculo de áreas planas. Regiones de tipo I.

Principio de Cavalieri. *El área de una región plana es igual a la integral de las longitudes de sus secciones por rectas paralelas a una recta dada.*

Supongamos que f, g son funciones continuas y llamemos Ω a la región del plano comprendida entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Se dice que Ω es una región de tipo I. Su área viene dada por

$$\lambda(\Omega) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \,\mathrm{d}x$$

Cálculo de áreas planas. Regiones de tipo II. Supongamos que f, g son funciones continuas y llamemos Ω a la región del plano comprendida entre las curvas $x = f(y)$ y $x = g(y)$ para $a \leqslant y \leqslant b$. Se dice que Ω es una región de tipo II. Su área viene dada por

$$\int_a^b |f(y) - g(y)| \,\mathrm{d}y$$

Observa que permutando y por x una región de tipo II se convierte en otra de tipo I con igual área.

Longitud de un arco de curva. La longitud de una curva dada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$ viene dada por

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \,\mathrm{d}t$$

Para el caso particular de que la curva sea la gráfica de una función $y = f(x)$, esto es $\gamma(x) = (x, f(x))$, entonces su longitud viene dada por

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \,\mathrm{d}x$$

Cálculo de volúmenes.

Cálculo de volúmenes por secciones planas. El volumen de una región en $\mathbb{R}^3$ es igual a la integral del área de sus secciones por planos paralelos a uno dado.

Volumen de un cuerpo de revolución. Los cuerpos de revolución son regiones de $\mathbb{R}^3$ que se obtienen girando una región plana alrededor de una recta llamada eje de giro.

Método de los discos o de las arandelas.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Girando la región del plano comprendida entre la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$, alrededor del eje OX obtenemos un sólido de revolución Ω cuyo volumen viene dado por:

$$Vol(\Omega) = \pi \int_a^b f(x)^2 \,\mathrm{d}x$$

El volumen del sólido de revolución, Ω, obtenido girando alrededor del eje OX una región de tipo I definida por dos funciones continuas $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tales que $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, se obtiene integrando las áreas de las coronas circulares o arandelas, $\Omega(x)$, de radio interior $f(x)$ y radio exterior $g(x)$, obtenidas al cortar Ω por un plano perpendicular al eje OX en el punto $(x, 0, 0)$.

$$Vol(\Omega) = \pi \int_a^b (g(x)^2 - f(x)^2) \,\mathrm{d}x$$

Consideremos ahora un sólido de revolución obtenido girando alrededor del eje OY una región R de tipo II, definida por dos funciones continuas $\varphi, \psi : [c,d] \to \mathbb{R}$ tales que $0 \leqslant \varphi(y) \leqslant \psi(y)$ para todo $y \in [c,d]$, es decir, R es la región

$$R = \{(x,y) : y \in [c,d], \varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y)\}$$

El volumen del sólido de revolución resultante, Ω, viene dado por:

$$Vol(\Omega) = \pi \int_c^d (\psi(y)^2 - \varphi(y)^2)\,\mathrm{d}y$$

Método de las láminas o de los tubos.

Consideremos una función positiva $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y la región $G(f,a,b)$ limitada por la gráfica de dicha función y las rectas verticales $x = a$, $x = b$. Girando dicha región alrededor del eje OY obtenemos un sólido de revolución, Ω, cuyo volumen viene dado por

$$Vol(\Omega) = 2\pi \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

En general, si notamos por $R(x)$ la distancia del punto $(x,0)$ al eje de giro, entonces:

$$Vol(\Omega) = 2\pi \int_a^b R(x) f(x)\,\mathrm{d}x$$

Cálculo de áreas de superficies de revolución. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función con derivada primera continua. Girando la gráfica de dicha función alrededor del eje OX obtenemos una superficie de revolución, Γ cuya área viene dada por:

$$\lambda(\Gamma) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$